#MINTatHome: Challenge of the Week 02 Lösungs-PDF

Challenge 2 – „Der Planet Ypsilon“

Die Lösungen

Gemeinsame Bezeichnungsweisen: Mit a, d bzw. e bezeichnen wir – den Anfangsbuchstaben der Zahlen entsprechend – die Anzahl der Monate mit 28, 30 bzw. 31 Tagen; mit m die Gesamtzahl der Monate des Jahres auf Ypsilon.

1. Beweis (durch Abschätzung):

Eine Einteilung des Jahres auf Ypsilon in 11 Monate oder weniger ist nicht möglich, weil die größtmögliche Tageszahl bei einer solchen Einteilung $11 \times 31 = 341$ Tage wäre. Dies sind 24 Tage zu wenig.

Die kleinstmögliche Zahl von Tagen bei einer Einteilung in 13 oder mehr Monate ist $13 \times 28 = 364$ Tage. Sie ist gegeben, wenn man ausschließlich Monate mit 28 Tagen hat. Für eine Einteilung mit 365 Tagen, also genau einem Tag mehr, muss man mindestens einen Monat verlängern oder mindestens einen zusätzlichen Monat einführen. Die erste Maßnahme ergibt aber mindestens zwei Tage mehr, die zweite Maßnahme mindestens 28 Tage mehr.

Es bleibt also höchstens die Möglichkeit mit 12 Monaten.

Variante (abstrakte Formulierung): Wir betrachten die nicht-negativen ganzzahligen Lösungen (a, d, e, m) des Gleichungssystems:

$$365 = 28a + 30d + 31e \text{ und } m = a + d + e.$$

Es ist sicher $28m = 28\,(a + d + e) \leq 28a + 30d + 31e = 365 \leq 31(a + d + e) = 31m$; nach Division durch 28 bzw. 31 folgt $\frac{365}{31} \leq m \leq \frac{365}{28}$, also $11\frac{24}{11} < m < 13\frac{1}{28}$.

Da m ganzzahlig ist, folgt $m = 12$ oder $m = 13$.

Wäre $m = 13$, ergäbe sich die notwendige Bedingung:

$365 = 28a + 30d + 31e = 28\,(a + d + e) + 2d + 3e = 28m + 2d + 3e = 28 \times 13 + 2d + 3e = 364 + 2d + 3e$ oder äquivalent $1 = 2d + 3e$.

Falls $d = e = 0$, ist $2d + 3e = 0$; falls $d > 0$ oder $e > 0$, ist $2d + 3e \geq 2$. Da hiermit alle möglichen Werte für d und e untersucht sind, kann $2d + 3e$ niemals den Wert 1 annehmen. Damit scheidet $m = 13$ aus und es bleibt $m = 12$ als einzige Möglichkeit.

2. Beweis (Betrachtung *mod* 30 und *mod* 10 mit Angabe aller möglichen Kalendereinteilungen):

Wir suchen alle ganzzahligen und nicht-negativen Lösungen (a, d, e, m) des Gleichungssystems:

$$365 = 28a + 30d + 31e \quad \text{(A)} \quad \text{und} \quad m = a + d + e. \quad \text{(B)}$$

Da die Variablen a, d und e ganzzahlig und nicht negativ sind, folgt aus (A)

$0 \leq a \leq 13$, $0 \leq d \leq 12$ und $0 \leq e \leq 11$.

Betrachtet man in Gleichung (A) die Reste *mod* 30, so erhält man die notwendige Bedingung

$5 = -2a + 0d + e$ mod 30 oder äquivalent $e = 5 + 2a$ mod 30.

$a = 13$ scheidet aus, sonst wäre $e = 5 + 2 \times 13 = 5 + 26 = 31 = 1$ *mod* 30; wegen $0 \leq e \leq 11$ sogar $e = 1$. Einsetzen in (A) ergäbe $365 = 28 \times 13 + 30d + 31 \Leftrightarrow 365 = 364 + 30d + 31 \Leftrightarrow d = -1$; dies widerspricht der Bedingung $0 \leq d \leq 12$.

Also ist $0 \leq a \leq 12$, damit ist $0 < 5 + 2a < 30$ und aus der Gleichung $e = 5 + 2a$ *mod* 30 folgt zusammen mit $0 \leq e \leq 11$ sogar $e = 5 + 2a$. Dies setzen wir in (A) ein und erhalten $365 = 28a + 30d + 31\,(5 + 2a) \Leftrightarrow 210 = 90a + 30d \Leftrightarrow d = 7 - 3a$. Dies setzen wir schließlich in (B) ein und erhalten die notwendige Bedingung $m = a + (7 - 3a) + (5 + 2a) = 12$.

Aus $0 \leq d = 7 - 3a$ folgt sofort $a < \frac{7}{3}$, also $a \in \{0,1,2\}$. Setzt man diese Werte in (A) ein, so erhält man zusammen mit der Bedingung $e \leq 12$ und der Überlegung, dass die Einerziffer des Ausdrucks $30d + 31e$ allein durch die Zahl e bestimmt wird, die notwendigen Bedingungen

$a = 0 \Rightarrow 365 = 28 \times 0 + 30d + 31e \Rightarrow e = 5$, mit (B) folgt $d = 12 - 5 = 7$,

$a = 1 \Rightarrow 365 = 28 \times 1 + 30d + 31e \Rightarrow 337 = 30d + 31e \Rightarrow e = 7$, mit (B) folgt $d = 12 - 1 - 7 = 4$,

$a = 2 \Rightarrow 365 = 28 \times 2 + 30d + 31e \Rightarrow 309 = 30d + 31e \Rightarrow e = 9$, mit (B) folgt $d = 12 - 2 - 9 = 1$.

Die Überprüfung in (A) ergibt, dass diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, d. h. dass die so gefundenen Quadrupel (0, 7, 5, 12), (1, 4, 7, 12), und (2, 1, 9, 12) tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems (A) und (B) sind.

3. Beweis (Abschätzung und Betrachtung mod(2)):

Wir betrachten die nicht-negativen ganzzahligen Lösungen (*a, d, e, m*) des Gleichungssystems:

$$365 = 28a + 30d + 31e \text{ und } m = a + d + e.$$

Da 365 eine ungerade Zahl ist, muss die Summe auf der rechten Seite der ersten Gleichung mindestens einen ungeraden Summanden enthalten. Damit ist $e \geq 1$ und es gilt:

$28\,(m - 1) = 28\,(a + d + e - 1) \leq 28a + 30d + 31\,(e - 1) = 365 - 31 = 334 \leq 31\,(a + d + (e - 1)) = 31\,(m - 1)$; Division durch 28 bzw. 31 ergibt $10\frac{24}{31} = \frac{334}{31} \leq m - 1 \leq \frac{334}{28} = 11\frac{26}{28}$.

Da m ganzzahlig ist, folgt $m = 12$.

Bemerkung: Gefunden wird nur eine notwendige Bedingung. Es wird nicht untersucht, ob eine Einteilung mit 12 Monaten tatsächlich möglich ist. Dies wird in der Aufgabenstellung auch nicht verlangt.